

**Nicolae Grigore**

# **MATEMATICĂ OLIMPIADE ȘI CONCURSURI ȘCOLARE**

**Clasa a VI-a**

**Probleme selectate pe unități de învățare  
cu rezolvări complete**

**Editura NOMINA**

# CUPRINS

## ARITMETICĂ. ALGEBRĂ

|                                                                                                              |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| I. OPERAȚII CU NUMERE NATURALE.....                                                                          | 3  |
| 1. Puteri. Operații cu puteri. Ecuații în mulțimea numerelor naturale .....                                  | 3  |
| 2. Divizibilitatea în mulțimea numerelor naturale $\mathbb{N}$ .....                                         | 7  |
| 3. Sisteme de numerație .....                                                                                | 21 |
| 4. Pătrate și cuburi perfecte .....                                                                          | 24 |
| II. MULȚIMEA NUMERELOR RAȚIONALE POZITIVE $\mathbb{Q}_+$ .....                                               | 27 |
| 1. Modalități de scriere. Comparare. Operații cu numere raționale.....                                       | 27 |
| 2. Rapoarte. Proportii. Proportionalitate directă. Proportionalitate inversă.<br>Șir de rapoarte egale ..... | 35 |
| 3. Procente. Probabilități .....                                                                             | 43 |
| 4. Identități. Inegalități.....                                                                              | 45 |
| III. Mulțimea numerelor întregi ( $\mathbb{Z}$ ) .....                                                       | 50 |
| 1. Divizibilitatea numerelor întregi. Ecuații .....                                                          | 50 |
| 2. Mulțimi. Operații cu mulțimi.....                                                                         | 51 |
| IV. Șiruri. Sume de numere în mulțimile $\mathbb{N}$ , $\mathbb{Z}$ și $\mathbb{Q}$ .....                    | 56 |

## GEOMETRIE

|                                                                                                           |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| I. Puncte. Drepte. Segmente de dreaptă. Operații cu lungimi de segmente.....                              | 59 |
| II. Unghiuri. Operații cu măsuri de unghiuri .....                                                        | 70 |
| III. Triunghiul. Triunghiul isoscel. Triunghiul echilateral. Triunghiul dreptunghic.<br>Proprietăți ..... | 91 |

|               |     |
|---------------|-----|
| SOLUȚII ..... | 107 |
|---------------|-----|

# ARTITMETICĂ. ALGEBRĂ

## I. OPERAȚII CU NUMERE NATURALE

### I. Puteri. Operații cu puteri. Ecuații în mulțimea numerelor naturale

1. a) Fie  $n = (2^{90} + 2^{91} + 4^{46}) : (2^{92} + 2^{91} + 4^{44})$ . Arătați că  $n < 4$ .

b) Stabiliți care dintre numerele  $2^{90}$  și  $3^{62}$  este mai mare.

*Etapă locală, Caraș-Severin 2009, prof. Adriana și Lucian Dragomir*

2. Să se afle numărul  $a \in \mathbb{N}$ , știind că:  $3^a \cdot (3^a + 1) = 90$ .

*Etapă locală, Cluj 2009, prof. Gherasim Feurdean*

3. a) Rezolvați ecuația:  $5 + 5 \cdot 6 + 5 \cdot 6^2 + \dots + 5 \cdot 6^{2008} = x^{2009} - 1$ .

b) Arătați că  $\frac{6^{2009} - 6}{35} \in \mathbb{N}$ .

*Etapă locală, Giurgiu 2009, prof. Ionel Tudor*

4. Să se calculeze:  $(36 \cdot 18^n - 8 \cdot 2^{n-4} \cdot 9^n - 3^{n+1} \cdot 6^{n+1}) : 18^{n-1}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

*Etapă locală, Harghita 2009*

5. Să se determine  $n \in \mathbb{N}$ , știind că:  $3^{2n} + 9^{n+1} = 30 \cdot 3^{2009}$ .

*Etapă locală, Ilfov 2009, prof. Gheorghița Furtună*

6. Aflați numerele naturale în baza 10 cuprinse între numerele 1000 și 2000 care împărțite la 217 să dea câtul egal cu restul.

*Etapă locală, Mureș 2009*

7. Să se arate că numerele:  $m = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 21$  și  $n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 23$  dau același rest prin împărțirea la 101.

*Etapă locală, Teleorman 2009*

8. Arătați că există numerele naturale nenule  $x, y, z$ , astfel încât  $3^{41} = x^2 + y^4 + z^5$ .

*Etapă locală, Argeș 2010, prof. Angela Ion*

9. Găsiți două numere naturale  $x$  și  $y$  cu proprietatea că  $(x - y)(x + y + 1) = 2010$ .

*Etapa locală, Călărași 2010, prof. Eugen Predoiu și Adrian Mărculescu*

10. Determinați numerele naturale  $x$  și  $y$ , știind că:  $x(y + 5) = (x + 1)(y^2 + 4)$ .

*Etapa locală, Mehedinți 2010*

11. Rezolvați ecuația:  $10 + 10 \cdot 11 + 10 \cdot 11^2 + 10 \cdot 11^3 + \dots + 10 \cdot 11^{2010} = x^{2011} - 1$ .

*Etapa locală, Suceava 2010, prof. Tamara Brutaru*

12. Scrieți numărul  $A = 1 + 8 + 8 \cdot 9 + 8 \cdot 9^2 + 8 \cdot 9^3 + \dots + 8 \cdot 9^{98}$  folosind numai trei cifre de 9.

*Etapa locală, Vâlcea 2010, G.M. 6/2009*

13. Determinați numerele naturale nenule  $x$  și  $y$ , cu  $x \geq y$  și  $x^2 + y^2 + x + y = 2^{x-y} + 3$ .

*Etapa județeană, Botoșani 2010, G.M. 6/2009*

14. Să se determine numerele naturale  $a, b, c$  care verifică relația:

$$a + b + c = a \cdot b \cdot c.$$

*Etapa județeană, Dolj 2010*

15. Determinați  $n \in \mathbb{N}$ , astfel încât  $n^4 - n^3 - n^2 + \frac{n}{7} = 2010$ .

*Etapa județeană, Giurgiu 2010, prof. Ionel Tudor*

16.a) Rezolvați ecuația:  $8 + 8 \cdot 9 + 8 \cdot 9^2 + \dots + 8 \cdot 9^{2010} = x^{2011} - 1$ .

b) Pentru  $x = 9$ , aflați suma cifrelor numărului  $A = x + \overline{xx} + \overline{xxx} + \dots + \underbrace{\overline{xxx\dots xx}}_{2011 \text{ cifre}}$ .

*Etapa județeană, Bistrița 2011*

17. Aflați  $n \in \mathbb{N}$  din egalitatea:

$$\frac{5^n + 1}{5^n} = \frac{30 \cdot 7^n + 7 \cdot 6^n}{30 \cdot 7^n}.$$

*Etapa județeană, Alba și Vluj 2011, prof. Cristian Petru Pop*

18. Determinați numerele naturale nenule  $a$  și  $b$ , știind că:  $\frac{5b}{4a+3} = \frac{b-1}{a}$ .

*Etapa județeană, Vâlcea 2011, prof. D.M. Băținețu, G.M. 4/2009*

19. Care sunt numerele naturale prime  $p$  și  $r$  pentru care avem:

$$p + p^2 + p^3 + r + r^2 + r^3 = 2393.$$

*Etapa județeană, Harghita 2011*

20. Determinați tripletele  $(x, y, z)$  de numere naturale, știind că  $\frac{x-10^2}{10^3} = \frac{234}{yz+y} = \frac{y}{10}$ .

*Etapa județeană, Dâmbovița 2011, prof. Damian Marinescu și Sorin Ion*

21.a) Aflați  $x \in \mathbb{N}^*$  astfel încât:  $\frac{2011}{x} + \frac{2012}{x+1} + \frac{2013}{x+2} + \dots + \frac{2109}{x+98} + \frac{2110}{x+99} = 100$ .

b) Determinați numărul natural  $n$ , pentru care numărul  $N = 5^n + 5^{n+1} + 5^{n+2} + 5^{n+3}$  are exact 120 de divizori naturali.

*Etapa județeană, Olt 2011*

22. Numerele naturale  $x, y$  și  $z$  verifică relațiile:

$$x + 3y + 5z = 200 \text{ și } x + 4y + 7z = 225.$$

Determinați valoarea sumei  $x + y + z$ .

*Etapa județeană, București 2011, G.M.*

23. Rezolvați în  $\mathbb{N}$  ecuația:  $x \cdot 3^{2011} = (3^{2011} - 1) : \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{2010}}\right)$ .

*Etapa locală, Suceava 2011*

24. Determinați numerele naturale  $m$  și  $n$  astfel încât  $7 \cdot 2^m = 2^n - 1$ .

*Etapa locală, Neamț 2011*

25. Fie numărul  $n = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2012}$ .

a) Arătați că  $n$  nu este multiplu al lui 2012.

b) Calculați restul împărțirii lui  $n$  la 31.

*Etapa locală, Cluj, 2012, prof. Sorin Borodi*

26. Să se determine restul împărțirii numărului  $N = 863 \underbrace{99\dots9}_{2012 \text{ cifre}}$  la numărul 32.

*Etapa locală, Galați, 2012*

17. Să se determine numerele naturale  $x$  și  $y$  care verifică relația:

$$3^x + 19 = 28^y.$$

*Etapa locală, Galați, 2012*

28. Fie numărul  $A = 4 + 8 + 12 + \dots + 328$ .

a) Calculați  $A$ .

b) Înlocuiți un număr minim de semne „+” cu semne „-” astfel încât  $A = 2012$ .

*Etapă locală, Suceava, 2012, prof. Stela Boghian*

29. Fie mulțimea  $M = \left\{ n \in \mathbb{N}^* \mid \frac{2n+1}{3} \in \mathbb{N} \text{ și } \frac{3n+1}{4} \in \mathbb{N} \right\}$ .

a) Aflați două elemente ale mulțimii  $M$ .

b) Determinați mulțimea  $M$ .

*Etapă locală, Suceava, 2012, prof. Tamara Brutaru*

30. a) Arătați că numărul  $A = 10^{20} + 3 \cdot 10^{10} - 1$  nu este pătrat perfect.

b) Comparați numerele  $128^{11}$  și  $65^{13}$ .

*Etapă locală, Vâlcea, 2012, G.M. nr. 10-11/2011*

31.a) Rezolvați în  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  ecuația  $4x + 503y = 2012$ .

b) Stabiliți dacă numerele  $2^{2013} \cdot 5^{2012} + 2012$  și  $4^{1006} \cdot 5^{2013} + 1$  sunt pătrate perfecte.

*Etapă locală, Vrancea, 2012, prof. Constantin Fudulică*

32. Scrieți numărul  $7 \cdot (3 + 7^{2010})$  ca o sumă de 7 numere naturale consecutive.

*Etapă locală, Bacău, 2012*

33. Să se determine numerele naturale  $a$  și  $b$ , știind că  $2^{3a} - 2^{3b} = \overline{xyz}$  și  $\overline{xyz}$  este număr impar.

*Etapă locală, Mureș, 2012, G.M. nr. 10/2011*

34. Să se determine numerele naturale  $m, n, p, n \geq 5$  din egalitatea:

$$5^{3m+1} + 2^{n-5} + 6^{n-3} = 663 - 1^p.$$

*Etapă locală, Gorj, 2012*

35. Împărțind numerele 2301, 3004 și 3559 la același număr natural diferit de zero, se obține același rest nenul. Aflați împărțitorul.

*Etapă locală, Satu Mare, 2012, prof. Cătălina Nagy*

36. Se consideră numerele  $a = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2011$ ,  $b = 1 + 2 + 3 + \dots + 2011$  și  $c = 2011^2 + 2011^1 + 2011^0$ . Determinați restul împărțirii numerelor  $a, b$ , respectiv  $c$  la 2012.

*Etapă locală, Harghita, 2012, prof. Péter Szőcs*

37. Determinați numerele naturale nenule  $x, y$  și  $z$  care verifică relațiile:

$$\frac{3x}{x+3} = \frac{5y}{y+5} = \frac{7 \cdot z}{z+7}.$$

*Etapă locală, Olt, 2013, prof. Daniela Nadia Tacliț*

38. a) Rezolvați în mulțimea numerelor prime următoarea ecuație:  $2m + 3p + 4t = 56$ .

*Etapă locală, Satu Mare, 2013, prof. Gabriela Tempfli*

b) Fie  $n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2010$  și  $m = 1 + 2 + 3 + \dots + 2010$ . Aflați restul împărțirii lui  $n + m$  la 2010.

*Etapă locală, Suceava 2010, G.M. nr. 2/2012*

39. Determinați numerele naturale  $x, y, z$  din egalitatea  $4 \cdot 8^x + 8 \cdot 4^y + 2 \cdot 16^z = 2592$ .

*Etapă locală, Mureș, 2013, G.M.*

40. Fie numerele  $a = 8 \cdot 3^{n+2} \cdot 25^{n+1}$  și  $b = 7 \cdot 5^{n+2} \cdot 15^{n+1}$ , unde  $n \in \mathbb{N}$ .

a) Comparați cele două numere.

b) Arătați că cele două numere dau același rest prin împărțirea cu 165, oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}$ .

*Etapă locală, Neamț, 2015*

41. Media aritmetică a numerelor naturale distincte  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2014}, 2014$  și 2016 este 2015.

a) Aflați media aritmetică a numerelor  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2014}$ .

b) Dacă numerele  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2014}$  sunt pare, arătați că  $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{2014} = 0$ .

*Etapă locală, Neamț, 2015*

42. Determinați numerele  $a, b, c \in \mathbb{N}$ , cu  $a < b$ , astfel încât  $\frac{a^2 + a}{2} + \frac{b^2 + b}{2} = \frac{c + 3}{c + 1}$ .

*Etapă locală, Suceava, 2015*

43. Fie numerele  $x = \frac{a}{b-2}$  și  $y = \frac{3b-6}{a-3}$ . Să se determine perechile  $(a, b)$  de numere naturale astfel încât  $x$  și  $y$  să fie simultan numere naturale.

*Etapă locală, Vaslui, 2015*

# GEOMETRIE

---

## I. Puncte. Drepte. Segmente de dreaptă.

### Operații cu lungimi de segmente

1. Se dau punctele coliniare A, B, C, D distincte în această ordine, astfel încât  $3 \cdot AB = 10 \cdot AC - 7 \cdot AD$  și  $BD = 20$  cm.

a) Să se afle BC și CD.

b) Dacă P este mijlocul segmentului AD și  $P \in (BC)$ , precizați valoarea maximă în numere naturale a lungimii segmentului AD.

*Etapa locală, Argeș 2009*

2. Se consideră trei puncte coliniare A, B și C, astfel încât  $\frac{AB}{BC} = \frac{3}{5}$  și  $AC = 40$  cm.

Fie M și P mijloacele segmentelor [AB], respectiv [BC]. Să se determine:

a) lungimile segmentelor [AB] și [BC];      b) valoarea raportului  $\frac{AP}{MC}$ .

*Etapa locală, Constanța 2009*

3. Pe o dreaptă luăm punctele A, B, C, D, astfel încât  $AB = a$  cm,  $AC = b$  cm,  $BD = c$  cm,  $BC = a + b$  cm,  $CD = a + b - c$  cm,  $AD = c - a$  cm. În ce ordine sunt situate punctele pe dreaptă?

*Etapa locală, Harghita 2009, prof. Csuszner Jolán*

4. Punctul C este mijlocul segmentului AB, D este mijlocul segmentului BC, E este mijlocul segmentului CD, iar F este un punct situat pe semidreapta (EB, astfel încât  $EB = BF = 3$  cm.

a) Arătați că  $ED = 1$  cm și  $BD = 2$  cm.

b) Aflați lungimea segmentului AF.

*Etapa locală, Sălaj 2011, Maramureș 2009*

5. Fie  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{10}$  puncte coliniare, distincte, în această ordine. Știind că  $A_1A_2 = 1$  cm,  $A_2A_3 = (1 + 2)$  cm, ...,  $A_9A_{10} = (1 + 2 + 3 + \dots + 9)$  cm, aflați lungimea segmentului  $A_1A_{10}$ .

*Etapa locală, Mureș 2009, prof. Dorel Gruîță*



6. Fie  $M_1$  mijlocul segmentului  $[AB]$ ,  $M_2$  mijlocul segmentului  $[AM_1]$ ,  $M_3$  mijlocul segmentului  $[AM_2]$ , ...,  $M_n$  mijlocul segmentului  $[AM_{n-1}]$ . Dacă  $AM_n = 1$ , calculați  $S = AM_n + AM_{n-1} + \dots + AM_3 + AM_2 + AM_1$ . Aflați  $n$ , știind că  $S = 127$ .

*Etapa locală, Prahova 2009, prof. Ion Tomescu și prof. Ion Lupea*

7. Se consideră punctele  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  coliniare, în această ordine, astfel încât  $A_1A_2 = 1$  cm,  $A_2A_3 = 2$  cm, ...,  $A_{n-1}A_n = n - 1$  cm,  $n$  fiind un număr natural,  $n > 1$ .

a) Calculați lungimea segmentului  $[A_1A_{24}]$ .

b) Să se determine numărul natural  $n$ , astfel încât lungimea segmentului  $[A_7A_n]$  să fie de 279 cm.

c) Determinați distanța dintre mijloacele segmentelor  $[A_1A_4]$  și  $[A_{21}A_{24}]$ .

*Etapa locală, Satu Mare 2009, prof. Anca Camelia Vanț*

8. Fie punctele  $A, B, C$  și  $D$  coliniare, astfel încât  $AD = AC + CD$ ,  $D \in (BC)$ . Arătați că dacă  $M$  și  $N$  sunt mijloacele segmentelor  $[AC]$  respectiv  $[BD]$ , atunci  $\frac{AD + DC}{MN} = 2$ .

*Etapa locală, Covasna 2011*

9. Punctele  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{2010}$  se află pe o dreaptă.  $A_1A_2 = 1$  cm,  $A_2A_3 = 3$  cm,  $A_3A_4 = 5$  cm,  $A_4A_5 = 7$  cm, ..., și așa mai departe, astfel încât  $A_nA_{n+1} = 2n - 1$  cm pentru celelalte segmente.

a) Aflați lungimea segmentelor  $A_{23}A_{24}$  și  $A_{41}A_{45}$ .

b) Calculați lungimea segmentului  $A_1M$ , unde  $M$  este mijlocul segmentului  $A_1A_{2010}$ .

*Etapa locală, Gorj 2011*

10. Fie segmentul  $AB$  și  $M_1, M_2, M_3, \dots, M_{10}$  mijloacele segmentelor  $[AB], [M_1B], [M_2B], \dots, [M_9B]$ . Dacă  $AB = 1024$  cm, calculați lungimea segmentului  $[M_4M_9]$ .

*Etapa locală, Iași 2011*

11. Fie punctele  $A, B, C$  și  $D$  (în această ordine) pe dreapta  $d$ , astfel încât  $BC = 3 \cdot AB$ ,  $CD = 3 \cdot BC$ . Dacă  $M$  este mijlocul segmentului  $[AC]$  și  $N$  mijlocul segmentului  $[BD]$ , iar  $AC = 9,6$  cm, aflați lungimea segmentelor  $BC, CD$  și  $MN$ .

*Etapa locală, Mehedinți 2011*

12. Pe o dreaptă se consideră punctele  $A, B, C, D, E, F$ , în această ordine, astfel încât  $AB = BC, BD = DE, CE = EF$ , iar  $AF = 48$  cm.

a) Calculați  $DE$ .

b) Dacă, în plus, mijlocul segmentului [DE] coincide cu mijlocul segmentului [AF], calculați AB și EF.

*Etapă locală, Neamț 2011*

**13.** Fie segmentul [AB] și punctele C, D, E pe acest segment, astfel încât:

$$BC = \frac{AB}{4}, \text{ D mijlocul segmentului AC și } DE = \frac{AD}{3}.$$

- a) Precizați poziția punctului E astfel încât  $[AE] \equiv [BC]$ .
- b) Arătați că segmentele [AB] și [CE] au același mijloc.
- c) Dacă punctul M este mijlocul segmentului [CE] și  $DM = 4$  cm, calculați lungimea segmentului AB.

*Etapă locală, Olt 2011, prof. Victoria Negrilă*

**14.** Pe o dreaptă se iau punctele O,  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{10}$  și simetricele lor față de punctul O:  $B_1, B_2, B_3, \dots, B_{10}$ , astfel încât  $OA_1 = 1$  cm,  $A_1A_2 = 2$  cm,  $A_2A_3 = 2^2$  cm, ...,  $A_9A_{10} = 2^9$  cm.

- a) Comparați lungimea segmentului  $[B_5A_{10}]$  cu lungimea segmentului  $[B_8A_5]$ .
- b) Dacă M este mijlocul segmentului  $[OA_8]$ , aflați k pentru care  $M \in [A_kA_{k+1}]$ .

*Etapă locală, Vaslui 2011*

**15.** Se consideră punctele  $A_1, A_2, \dots, A_{20}$  coliniare, în această ordine, astfel încât:  $A_1A_2 = 1$  cm,  $A_2A_3 = 2$  cm, ...,  $A_{19}A_{20} = 19$  cm. Să se calculeze:

- a) lungimea segmentului  $[A_1A_{20}]$ ;
- b) distanța dintre mijloacele segmentelor  $[A_1A_4]$  și  $[A_{17}A_{20}]$ .

*Etapă locală, Alba 2010*

**16.** Se dă un segment [AB] pe care îl împărțim în trei părți egale și la o treime de B luăm punctul  $A_1$ , împărțim segmentul  $A_1B$  în trei părți egale și la o treime de B luăm punctul  $A_2$ , și așa mai departe, până ajungem la  $A_{2010}$ . Care este cea mai mică lungime, exprimată printr-un număr natural, pe care trebuie să o aibă [AB] pentru ca lungimea segmentului  $[A_{2010}B]$  exprimată printr-un număr natural să fie cea mai mică?

*Etapă locală, Alba 2010, Nicolae Ivășchescu*

**17.** Fie A, B și C trei puncte coliniare cu  $B \in (AC)$ , iar punctul M este mijlocul segmentului [BC]. Dacă  $AB = p$  cm și  $BC = q$  cm, unde p și q sunt numere prime, iar  $AM = 7,5$  cm, calculați lungimea segmentului [AC].

*Etapă locală, Bacău 2010*

# SOLUȚII

## ARITMETICĂ. ALGEBRĂ

### I. Operații cu numere naturale

#### 1. Puteri. Operații cu puteri. Ecuații în mulțimea numerelor naturale

1. a)  $n = (2^{90} + 2^{91} + 2^{92}) : (2^{92} + 2^{91} + 2^{88}) = 2^{90} \cdot (1 + 2 + 4) : [2^{88} \cdot (16 + 8 + 1)] = (7 \cdot 2^{90}) : (25 \cdot 2^{88}) \Rightarrow n = \frac{28}{25} < 4$ ; b)  $2^{90} = (2^3)^{30} = 8^{30} < 9^{30} = 3^{60} < 3^{62}$  sau  $3^{62} = (3^2)^{31} = 9^{31} > 8^{31} = 2^{93}$ .

Deci  $2^{90} < 3^{62}$ . 2.  $3^a \cdot (3^a + 1)$  este produs de două numere naturale consecutive iar  $90 = 9 \cdot 10 \Rightarrow 3^a = 9$  și  $3^a + 1 = 10 \Rightarrow 3^a = 3^2 \Rightarrow a = 2$  și  $3^a = 10 - 1 \Rightarrow a = 2$ . Deci  $a = 2$ . 3. a) Scriem  $5 = 6 - 1$  și înlocuim:  $(6 - 1) + (6 - 1) \cdot 6 + (6 - 1) \cdot 6^2 + \dots + (6 - 1) \cdot 6^{2008} = x^{2009} - 1 \Leftrightarrow 6 - 1 + 6^2 - 6 + 6^3 - 6^2 + \dots + 6^{2009} - 6^{2008} = x^{2009} - 1 \Leftrightarrow 6^{2009} - 1 = x^{2009} - 1 \Rightarrow x^{2009} = 6^{2009} \Rightarrow x = 6$ ; b) Observăm că  $6^{2009} - 6$  se poate scrie:  $6^{2009} - 6 = 5 \cdot 6 + 5 \cdot 6^2 + 5 \cdot 6^3 + \dots + 5 \cdot 6^{2008}$  sumă cu 2008 termeni;  $6^{2009} - 6 = 5 \cdot 6(1 + 6) + 5 \cdot 6^3(1 + 6) + \dots + 5 \cdot 6^{2007}(1 + 6) = 30 \cdot 7(1 + 6^2 + \dots + 6^{2006}) = 35 \cdot 6 \cdot (1 + 6^2 + \dots + 6^{2006})$ . Deci  $35 \mid 6^{2009} - 6$ ; SAU  $6^{2009} - 6 = (5 + 1)^{2009} - 6 = M_5 + 1 - 6 = M_5$  și  $6^{2009} - 6 = (7 - 1)^{2009} - 6 = M_7 - 1 - 6 = M_7$  și  $(5, 7) = 1 \Rightarrow 35 \mid 6^{2009} - 6$ . 4.  $[2 \cdot 18 \cdot 18^n - 2^{n-1} \cdot 9^n - (3 \cdot 6)^{n+1}] : 18^{n-1} = (2 \cdot 18^{n+1} - 18^{n-1} \cdot 9 - 18^{n+1}) : 18^{n-1} = 18^{n-1} \cdot (2 \cdot 18^2 - 9 - 18^2) : 18^{n-1} = 2 \cdot 324 - 333 = 315$ . 5. Egalitatea este echivalentă cu:  $3^{2n} \cdot (1 + 9) = 30 \cdot 3^{2009} \Leftrightarrow 3^{2n} \cdot 10 = 10 \cdot 3^{2010} \Leftrightarrow 3^{2n} = 3^{2010} \Leftrightarrow 2n = 2010 \Rightarrow n = 1005$ . 6.  $1000 < n < 2000$ ;  $n = 217 \cdot c + r$ ,  $r < 217$ ,  $c = r \Rightarrow n = 218 \cdot c \Rightarrow 1000 < 218c < 2000 \mid : 218 \Rightarrow 4 < c < 10 \Rightarrow c \in \{5, 6, 7, 8, 9\} \Rightarrow n \in \{218 \cdot 5; 218 \cdot 6; 218 \cdot 7; 218 \cdot 8; 218 \cdot 9\} \Rightarrow n \in \{1090, 1308, 1526, 1712, 1962\}$ .

7. Soluția I:  $n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 21 \cdot (22 \cdot 23) = m \cdot 506 = m \cdot (5 \cdot 101 + 1) \Rightarrow n = 5 \cdot 101 \cdot m + m \Rightarrow n - m = M_{101}$ . Deci numerele naturale  $m$  și  $n$  dau același rest la împărțirea cu 101.

Soluția a II-a:  $m = 19! \cdot 420 = 19!(4 \cdot 101 + 16)$ ;  $n = 19! \cdot 212520 = 19!(2104 \cdot 101 + 16)$ ;  $n - m = 19! \cdot 2100 \cdot 101 \Rightarrow 101 \mid (n - m) \Rightarrow$  numerele  $n$  și  $m$  dau același rest la împărțirea cu 101.

8. Vom scrie numărul  $3^{41}$  ca o sumă de trei puteri cu baza 3;  $3^{41} = 3 \cdot 3^{40} = 3^{40} + 3^{40} + 3^{40} = (3^{20})^2 + (3^{10})^4 + (3^8)^5 = x^2 + y^4 + z^5$ . Deci există numerele naturale  $x = 3^{20}$ ,  $y = 3^{10}$ ,  $z = 3^8$ , astfel încât  $3^{41} = x^2 + y^4 + z^5$ . 9.  $2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$ ;  $2010 = 1 \cdot 2010 = 2 \cdot 1005 = 3 \cdot 670 = 5 \cdot 402 = 6 \cdot 335 = 10 \cdot 201 = 15 \cdot 134 = 30 \cdot 67$ . Avem: 1)  $(x - y)(x + y + 1) = 1 \cdot 2010 \Rightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ x + y + 1 = 2010 \end{cases} \Rightarrow 2x = 2010 \Rightarrow x = 1005$  și  $y = 1004$  sau  $\begin{cases} x - y = 2010 \\ x + y = 0 \end{cases}$  impo-

sibil;  $y \neq 0$ ,  $x - y < x + y$ ; 2)  $(x - y)(x + y + 1) = 2 \cdot 1005 \Rightarrow \begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 1004 \end{cases} \Rightarrow 2x = 1006 \Rightarrow x =$

503 și  $y = 501$ ; 3)  $(x - y)(x + y + 1) = 3 \cdot 670$ , dar  $x - y < x + y + 1 \Rightarrow \begin{cases} x - y = 3 \\ x + y = 669 \end{cases} \Rightarrow 2x =$

$= 672 \Rightarrow x = 336$  și  $y = 333$ ; 4)  $(x - y)(x + y + 1) = 5 \cdot 402$ , dar  $x - y < x + y + 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-y=5 \\ x+y=401 \end{cases} \Rightarrow 2x=406 \Rightarrow x=203 \text{ și } y=198; 5) (x-y)(x+y+1)=6 \cdot 335, \text{ dar } x-$$

$$-y < x+y+1 \Rightarrow \begin{cases} x-y=6 \\ x+y=334 \end{cases} \Rightarrow 2x=340 \Rightarrow x=170 \text{ și } y=164; 6) (x-y)(x+y+1)=$$

$$=10 \cdot 201, \text{ dar } x-y < x+y+1 \Rightarrow \begin{cases} x-y=10 \\ x+y=200 \end{cases} \Rightarrow 2x=210 \Rightarrow x=105 \text{ și } y=95;$$

$$7) (x-y)(x+y+1)=15 \cdot 134, \text{ dar } x-y < x+y+1 \Rightarrow \begin{cases} x-y=15 \\ x+y=133 \end{cases} \Rightarrow 2x=148 \Rightarrow x=74 \text{ și}$$

$$y=59; 8) (x-y)(x+y+1)=30 \cdot 67, \text{ dar } x-y < x+y+1 \Rightarrow \begin{cases} x-y=30 \\ x+y=66 \end{cases} \Rightarrow 2x=96 \Rightarrow x=$$

$$=48 \text{ și } y=18. \text{ Deci } (x, y) \in \{(1005, 1004); (503, 501); (336, 333); (203, 198); (170, 164); (105, 95); (74, 59); (48, 18)\}.$$

**10. Soluția I:** Egalitatea dată este echivalentă cu:  $x(y+5)=x(y^2+4)+y^2+4 \Leftrightarrow x(-y^2+y+1)=y^2+4 \Leftrightarrow x=\frac{y^2+4}{-y^2+y+1} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow y \in \{0, 1\}$ . Pentru  $y \neq \{0, 1\} \Rightarrow -y^2+y+1 < 0$  și  $x \notin$

$\mathbb{N}$ . Dacă  $y=0 \Rightarrow x=4$  și  $y=1 \Rightarrow x=5 \Rightarrow (x, y) \in \{(4, 0); (5, 1)\}$ .

**Soluția a II-a:** Egalitatea din enunț este echivalentă cu:  $\frac{x}{x+1}=\frac{y^2+4}{y+5}$ , dar  $\frac{x}{x+1}<1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{y^2+4}{y+5}<1 \Leftrightarrow y^2-y<1 \Leftrightarrow y(y-1)<1 \Rightarrow y \in \{0, 1\}. \text{ Dacă } y=0 \Rightarrow \frac{x}{x+1}=\frac{4}{5} \Leftrightarrow 5x=$$

$$=4x+4 \Rightarrow x=4. \text{ Dacă } y=1 \Rightarrow \frac{x}{x+1}=\frac{5}{6} \Rightarrow 6x=5x+5 \Rightarrow x=5. \text{ Deci } (x, y) \in \{(4, 0);$$

$$(5, 1)\}. \text{ 11. Înlocuim } 10=11-1; 11-1 \cdot (11-1) \cdot 11+(11-1) \cdot 11^2+(11-1) \cdot 11^3+\dots +$$

$$+(11-1) \cdot 11^{2010}=x^{2011}-1 \Leftrightarrow 11-1+11^2-11+11^3-11^2+11^4-11^3+\dots +11^{2011}-$$

$$-11^{2010}=x^{2011}-1 \Leftrightarrow 11^{2011}-1=x^{2011}-1 \Leftrightarrow x^{2011}=11^{2011} \Rightarrow x=11. \text{ 12. } 8=9-1 \Rightarrow A=1+$$

$$+9-1+(9-1) \cdot 9+(9-1) \cdot 9^2+(9-1) \cdot 9^3+\dots +(9-1) \cdot 9^{98}; A=1+9-1+9^2-9+9^3-$$

$$-9^2+9^4-9^3+\dots +9^{99}-9^{98} \Rightarrow A=9^{99}. \text{ 13. } (x^2+x)+(y^2+y)=2^{x-y}+3 \Leftrightarrow x(x+1)+y(y+$$

$$+1)=2^{x-y}+3. \text{ Dar } x(x+1) \text{ și } y(y+1) \text{ sunt numere pare. (Produsul a două numere naturale}$$

$$\text{consecutive este un număr par). Cum 3 este număr impar } \Rightarrow 2^{x-y}=1 \Rightarrow x-y=0 \Rightarrow x=y. \text{ În-}$$

$$\text{locuim în ecuația dată } \Rightarrow 2x(x+1)=4 \mid :2 \Rightarrow x(x+1)=2 \Rightarrow x=1 \text{ și } y=1. \text{ 14. Evident dacă } a$$

$$=0 \text{ sau } b=0 \text{ sau } c=0 \Rightarrow a+b+c=0 \Rightarrow a=b=c=0. \text{ Dacă } a, b, c \in \mathbb{N}^* \text{ cu } a \leq b \leq c \Rightarrow a+b$$

$$+c=abc \Rightarrow abc \leq 3c \Leftrightarrow ab \leq 3 \Rightarrow a \cdot b \in \{1, 2, 3\}. \text{ Dacă } a \cdot b=1 \Rightarrow a=b=1 \Rightarrow c \notin \mathbb{NN}. \text{ Dacă } a \cdot b=2 \Rightarrow a=1, b=2 \text{ sau } a=2, b=1 \text{ și } c=3. \text{ Dacă } a \cdot b=3 \Rightarrow a=1, b=3 \text{ sau } a=3, b=1 \text{ și } c=2. \text{ Deci } (a, b, c) \in \{(0, 0, 0); (1, 2, 3); (1, 3, 2); (2, 1, 3); (2, 3, 1); (3, 1, 2);$$

$$(3, 2, 1)\}. \text{ 15. Evident } n > 0. \text{ Dacă } n=1, \frac{n}{7} \notin \mathbb{N} \text{ și } n=1 \text{ nu verifică ecuația, atunci } \frac{n}{7} \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n \in \{7, 14, 21, \dots, 7k\}. \text{ Dacă } n=7 \Rightarrow 7^4-7^3-7^2+1=2010 \Leftrightarrow 2401-343-49+1=$$

$$=2010 \text{ (A). Dacă } n=14 \Rightarrow 14^4-14^3-14^2+2=2010 \Leftrightarrow 196 \cdot 181+2=2010 \Leftrightarrow 35476=$$

$$=2010 \text{ (F). Deci } n=7. \text{ 16. a) Soluția I: Scriem } 8=9-1; (9-1)+9 \cdot (9-1)+9^2(9-1)+\dots +$$

$$+9^{2010}(9-1)=x^{2011}-1 \Leftrightarrow 9-1+9^2-9+9^3-9^2+\dots +9^{2011}-9^{2010}=x^{2011}-1 \Leftrightarrow 9^{2011}-1=$$

$$= x^{2011} - 1 \Leftrightarrow 9^{2011} = x^{2011} \Rightarrow x = 9.$$

**Soluția a II-a:** Scoatem factor comun pe 8;  $8(1 + 9 + 9^2 + \dots + 9^{2010}) = x^{2011} - 1$ . În paranteză avem suma puterilor consecutive ale bazei 9;

$$\begin{array}{r} S = 1 + 9 + 9^2 + \dots + 9^{2010} \cdot 9 \\ 9S = 9 + 9^2 + 9^3 + \dots + 9^{2011} \quad - \end{array}$$

$$8S = 9^{2011} - 1 \Rightarrow S = \frac{9^{2011} - 1}{8}. \text{ Avem } 8 \cdot \frac{9^{2011} - 1}{8} = x^{2011} - 1 \Leftrightarrow 9^{2011} - 1 = x^{2011} - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9^{2011} = x^{2011} \Rightarrow x = 9; \text{ b) Numărul } A \text{ este } A = 9 + 99 + 999 + \underbrace{999\dots99}_{2011}; A = (10 - 1) + (10^2 - 1) + (10^3 - 1) + \dots + (10^{2011} - 1); A = (10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^{2011}) - 1 \cdot 2011 = \underbrace{1111\dots10}_{2010} - 2011 = \underbrace{1111\dots1}_{2006}109099. \text{ Suma cifrelor este } 1 \cdot 2007 + 3 \cdot 9 = 2034. \text{ 17. Egalitatea dată este}$$

$$\text{echivalentă cu: } \frac{5^n}{5^n} + \frac{1}{5^n} = \frac{30 \cdot 7^n}{30 \cdot 7^n} + \frac{7 \cdot 6^n}{30 \cdot 7^n} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{5^n} = 1 + \frac{7 \cdot 6^n}{30 \cdot 7^n} \Leftrightarrow \frac{1}{5^n} = \frac{7 \cdot 6^n}{30 \cdot 7^n} \Leftrightarrow 30 \cdot 7^n =$$

$$= 7 \cdot 30^n \Leftrightarrow \frac{30}{7} = \frac{30^n}{7^n} \Leftrightarrow \frac{30}{7} = \left(\frac{30}{7}\right)^n \Rightarrow n = 1. \text{ 18. Egalitatea dată este echivalentă cu:}$$

$$\frac{5a}{4a+3} = \frac{b-1}{b}, \text{ dar } \frac{b-1}{b} < 1 \Rightarrow \frac{5a}{4a+3} < 1 \Rightarrow a < 3 \Rightarrow a \in \{1, 2\}. \text{ Dacă } a = 1 \Rightarrow \frac{5}{7} = \frac{b-1}{b} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5b = 7b - 7 \Leftrightarrow 2b = 7 \Rightarrow b \notin \mathbb{N}. \text{ Dacă } a = 2 \Rightarrow \frac{10}{11} = \frac{b-1}{b} \Leftrightarrow 11b - 11 = 10b \Rightarrow b = 11 \in \mathbb{N}.$$

Deci  $a = 2$  și  $b = 11$ . **19.** Suma dată este un număr impar, rezultă că cei 6 termeni nu pot avea aceeași paritate. Deci cel puțin unul este par. fie  $p$  număr par și prim  $\Rightarrow p = 2 \Rightarrow 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + r + r^2 + r^3 = 2393 \Leftrightarrow r \cdot (1 + r + r^2) = 2393 - 14 \Leftrightarrow r \cdot (1 + r + r^2) = 2379 = 3 \cdot 13 \cdot 61$ . Dacă  $r = 3 \Rightarrow$  suma este mai mică decât 2393. Dacă  $r = 61 \Rightarrow$  suma este mai mare decât 2393. Dacă  $r = 13 \Rightarrow$  suma  $= 2 + 2^2 + 2^3 + 13 + 13^2 + 13^3 = 2393$ . Deci  $p = 2$  și  $r = 13$  sau  $p = 13$  și  $r = 2$ ;

$$\text{20. Din } \frac{234}{y(z+1)} = \frac{y}{10} \Rightarrow y^2(z+1) = 2340. \text{ Dacă } y = 1 \Rightarrow z+1 = 2340 \Rightarrow z = 2339 \text{ și}$$

$$\frac{x-100}{1000} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow x-100 = 100 \Rightarrow x = 200. \text{ Dacă } y = 2 \Rightarrow \frac{234}{z+1} = \frac{4}{10} \Rightarrow z+1 = \frac{2340}{4} \Rightarrow z =$$

$$= 584 \text{ și } \frac{x-100}{1000} = \frac{2}{10} \Leftrightarrow x-100 = 200 \Rightarrow x = 300. \text{ Dacă } y = 3 \Rightarrow \frac{234}{z+1} = \frac{9}{10} \Rightarrow z+1 = \frac{2340}{9}$$

$$\Rightarrow z+1 = 260 \Rightarrow z = 259 \text{ și } \frac{x-100}{1000} = \frac{3}{10} \Rightarrow x-100 = 300 \Rightarrow x = 400. \text{ Dacă } y = 4 \Rightarrow \frac{234}{z+1} =$$

$$= \frac{16}{10} \Rightarrow z+1 = \frac{2340}{16} \notin \mathbb{N}. \text{ Dacă } y = 5 \Rightarrow \frac{234}{z+1} = \frac{15}{10} \Rightarrow z+1 = \frac{2340}{27} \notin \mathbb{N}. \text{ Dacă } y = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{234}{z+1} = \frac{36}{10} \Rightarrow z+1 = \frac{2340}{36} = 65 \Rightarrow z = 64 \text{ și } \frac{x-100}{1000} = \frac{6}{100} \Rightarrow x-100 = 600 \Rightarrow x = 700.$$

$$\text{Dacă } y = 7, 8 \text{ nu avem soluții, } 7 \nmid 234 \text{ și } 8 \nmid 234. \text{ Dacă } y = 9 \Rightarrow \frac{234}{z+1} = \frac{81}{10} \Rightarrow z+1 = \frac{2340}{81} \notin$$

$\mathbb{N}$ . Deci  $(x, y, z) \in \{(200, 1, 2339); (300, 2, 584); (400, 3, 259); (700, 6, 64)\};$